121. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ
ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΗΤΡΩΝ ΑΠΟ 2779 ΕΩΣ 12167

Εξ αποστάσεως εξέταση, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2021, Δευτέρα 08-02-2021.
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά.
Έναρξη εξέτασης 8:45. Λήξη 11:30.

ΟΔΗΓΙΕΣ - ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Μπορείτε να γράψετε τις απαντήσεις σας με στυλό σε αριθμημένες κόλλες ώστε να είναι ευδιάκριτες όπως όταν γράφετε εξετάσεις δια ζώσης.

Στην αρχή των απαντήσεών σας θα γράψετε το **Ονοματεπώνυμο** και τον **Αριθμό Μητρώου** σας.

Κατά τη διάρκεια της τηλεδιάσκεψης πρέπει να είστε **ΔΙΑΡΚΩΣ** συνδεδεμένοι με ανοικτή κάμερα και κλειστό μικρόφωνο, εκτός εάν σας ζητηθεί να ανοίξετε το μικρόφωνο. Θα πρέπει να παρακολουθείτε το chat της αίθουσας εξέτασης στην οποία θα είστε συνδεδεμένοι και να έχετε μαζί σας τη φοιτητική ταυτότητα και να την επιδείξετε σε περίπτωση που σας ζητηθεί. Αν παρουσιασθεί τεχνικό πρόβλημα στείλτε μήνυμα nkechag@uoi.gr

Μόλις τελειώσετε με τις απαντήσεις σας, θα τις σκανάρετε και θα τις αποθηκεύσετε με τον αριθμό μητρώου σας σε αρχείο pdf το οποίο θα πρέπει να αναρτήσετε στο σύστημα MsTeams εντός του ορισμένου χρονικού διαστήματος. ΝΑ ΜΗΝ ΑΠΟΧΩΡΗΣΕΤΕ από το σύστημα χωρίς να επιβεβαιώσετε την ανάρτηση των απαντήσεών σας. **Δεν θα γίνουν δεκτά αρχεία που θα αναρτηθούν σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα ή ηλεκτρονική διεύθυνση.**

Δεν χρειάζεται να αναρτήσετε τα πρόχειρά σας.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας πλήρως.

ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. (Μόρια 10) Αν $A \in M(k \times n, \mathbb{R})$ και $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$ ώστε ο A να έχει μια μηδενική γραμμή, τότε και ο AB έχει επίσης μια μηδενική γραμμή.

2. (Μόρια 15) Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τον υπόχωρο $Z =< (1, 1, -1, 1) >$ και τους υποχώρους $V =< (1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 2), (1, -1, 0, 0) >$ και $W =< (1, 1, 1, 0) >$. Να δοθούν υπόχωροι V' και W' ώστε $Z = V' \cap W'$, $V \oplus V' = \mathbb{R}^4$ και $W \oplus W' = \mathbb{R}^4$. Να εξετάσετε αν οι υπόχωροι V' και W' ορίζονται μονοσήμαντα.

3. (Μόρια 15) Αν $A \in M(k \times n, \mathbb{R})$ και το σύστημα $Ax = b_0$ έχει μοναδική λύση για κάποιο $b_0 \in M(k \times 1, \mathbb{R})$, μπορεί να υπάρχει $b \in M(k \times 1, \mathbb{R})$ ώστε το σύστημα $Ax = b$ να έχει άπειρες λύσεις; Αποδείξτε την απάντησή σας.

4. (Μόρια 10) Να υπολογισθεί το a ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση, καμία λύση, άπειρες λύσεις.
$$x + y + az = 1$$
$$5x + (4 + a)y + (4a + 1)z = 8$$
$$x + ay + z = 4$$
$$ax + y + z = b.$$

5. (Μόρια 10) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες P και Q ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Οι πίνακες P και Q να εκφρασθούν ως γινόμενα στοιχειωδών πινάκων.

6. (Μόρια 30) Ο πίνακας του ενδομορφισμού $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ως προς τη βάση $S = ((x - 2), (x^2 + x), (x^2 - x))$ είναι ο
$$T_S^S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$
Να βρεθεί βάση S' του $\mathbb{R}_2[x]$, ωστε ο πίνακας του T να είναι ο
$$T_{S'}^{S'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

(Το θέμα 7 βρίσκεται στην πίσω σελίδα.)

7. (Μόρια 10) Για $n \geq 2$ ορίζουμε με D_n την ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^3 & ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ x^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & ax^{n-4} & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Να δείξετε ότι $D_n = (x+a)^{n-1}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ